6/4

Άσκηση

Υλικό σημείο μάζας m κινείται με την επίδραση του βάρους $-mg\vec{z_0}$ στο $Ax+By+\Gamma z=0$ όπου A, B, Γ σταθ. και $A^2+B^2+\Gamma^2=1$. Τη χρονική στιγμή $t=0$ το υλικό σημείο βρίσκεται στη θέση $O(0,0,0)$ και ταχύτητα $(0,0,0)$. Να βρεθούν οι εξισώσεις Lagrange α' είδους να ολοκληρωθούν αυτές και να βρεθεί η λύση που αντιστοιχεί στις δοθείσες αρχικές συνθήκες

Λύση

Δεσμός: $f(x,y,z) \equiv Ax+By+\Gamma z=0$

Επιβεβλημένη Δύναμη: $\vec{F}^{(\varepsilon)} = f = -mg\vec{z_0}$

Δεσμική δύναμη: $\vec{F}^{(\delta)} = \lambda \nabla f = \lambda\left(\frac{\partial f}{\partial x}\vec{x_0} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{y_0} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{z_0}\right)$

$= \lambda(A\vec{x_0} + B\vec{y_0} + \Gamma\vec{z_0})$

Οι εξισώσεις Lagrange α' είδους είναι:

$$\left\{\begin{array}{l} m\ddot{x} = \lambda A \\ m\ddot{y} = \lambda B \\ m\ddot{z} = \lambda\Gamma - mg \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \ddot{x} = \frac{\lambda A}{m} \\ \ddot{y} = \frac{\lambda B}{m} \\ \ddot{z} = -g + \frac{\lambda\Gamma}{m} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A\ddot{x} = \frac{\lambda A^2}{m} \\ B\ddot{y} = \frac{\lambda B^2}{m} \\ \Gamma\ddot{z} = -\Gamma g + \frac{\lambda\Gamma^2}{m} \end{array}\right.$$

ισχύει επίσης $A\ddot{x}+B\ddot{y}+\Gamma\ddot{z}=0$ και άρα

$$A\ddot{x}+B\ddot{y}+\Gamma\ddot{z} = \frac{\lambda A^2}{m} + \frac{\lambda B^2}{m} - \Gamma g + \frac{\lambda\Gamma^2}{m} = 0 \Leftrightarrow$$

$$0 = \frac{\lambda}{m}(A^2+B^2+\Gamma^2) - \Gamma g \Rightarrow 0 = \frac{\lambda}{m} - \Gamma g \Rightarrow \lambda = \Gamma g m$$

άρα τελικά: $$\left\{\begin{array}{l} \ddot{x} = \Gamma g A \\ \ddot{y} = \Gamma g B \\ \ddot{z} = -g + \Gamma^2 g \end{array}\right\}$$

Αρχικές Συνθήκες: $t=0$, $\begin{array}{l} x=y=z=0 \\ \dot{x}=\dot{y}=\dot{z}=0 \end{array}$

Ολοκληρώνοντας 2 φορές έχουμε: $\dot{x} = \Gamma g A t + c \Rightarrow c = 0$

άρα $\dot{x} = \Gamma g A t \Rightarrow x = \Gamma g A \frac{t^2}{2} + k \Rightarrow k=0$ άρα $x = \frac{\Gamma g A}{2}t^2$

Όμοια $y = \frac{\Gamma g B}{2}t^2$ και $z = \frac{-g+\Gamma^2 g}{2}t^2$

Άσκηση

Υλικό σημείο κινείται στην επιφάνεια $z=5\sin(x+y)$ με την επίδραση του βάρους $B=-mg\vec{z_0}$.
Σε ποιες θέσεις ισορροπεί το υλικό σημείο

Λύση

Δεσμός: $f(x,y,z) \equiv 5\sin(x+y)-z=0$

Επιβεβλημένη: $F^{(\varepsilon)}=-mg\vec{z_0}$

Δεσμική: $F^{(\delta)}=\lambda\left(\frac{\partial f}{\partial x}\vec{x_0}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{y_0}+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{z_0}\right) \Rightarrow$

$$F^{(\delta)}=\lambda\left(5\cos(x+y)\vec{x_0}+5\cos(x+y)\vec{y_0}-\vec{z_0}\right)$$

Σώμα ισορροπεί άρα $m\ddot{r}=0$ άρα $F^{(\varepsilon)}+F^{(\delta)}=0 \Rightarrow$

$$\left\{\begin{array}{l}\lambda\cos(x+y)=0\\ \lambda\cos(x+y)=0\\ -\lambda-mg=0\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\cos(x+y)=0\\ \cos(x+y)=0\\ \lambda=-mg\end{array}\right.$$

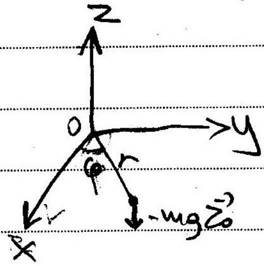
$$\cos(x+y)=0 \Rightarrow x+y=k\pi+\frac{\pi}{2}$$

άρα $z=5\sin\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right)=5\cdot(-1)^k$

Άσκηση

Υλικό σημείο μάζας m κινείται σε ευθεία που περιστρέφεται στο οριζόντιο επίπεδο xOy. Η ευθεία περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω. Να βρεθεί η κίνηση του υλικού σημείου.

Λύση



Οι εξισώσεις των δεσμών:

$f_1 \equiv y-x\,tg\varphi=0 \Leftrightarrow y\cos\varphi-x\sin\varphi=0$

$f_2 \equiv z=0$

$F^{(\varepsilon)} \equiv f=-mg\vec{z_0}$

$$F^{(\delta)}=\lambda_1\nabla f_1+\lambda_2\nabla f_2=\left(\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x}+\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)\vec{x_0}+\left(\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial y}+\lambda_2\frac{\partial f}{\partial y}\right)\vec{y_0}$$
$$+\left(\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial z}+\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial z}\right)\vec{z_0} \Rightarrow$$

$$F^{(\delta)}=-\lambda_1\sin\varphi\,\vec{x_0}+\lambda_1\cos\varphi\,\vec{y_0}+\lambda_2\vec{z_0}$$

$\omega=\dot{\varphi}=$ σταθερό $\Rightarrow \varphi=\omega t$ (αφού $t=0: \varphi=0$)

εξ. κίνησης: $\left\{\begin{array}{l}m\ddot{x}=-\lambda_1\sin\omega t\\ m\ddot{y}=\lambda_1\cos\omega t\\ m\ddot{z}=\lambda_2-mg\end{array}\right\}$

Επειδή η κίνηση γίνεται στο επίπεδο, θα χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις τις 2 πρώτες.

θέλω $\begin{cases} x = r\cos\omega t \\ y = r\sin\omega t \end{cases}$

$\dot{x} = \dot{r}\cos\omega t - r\omega\sin\omega t \Rightarrow$

$\ddot{x} = \ddot{r}\cos\omega t - \dot{r}\omega\sin\omega t - r\omega^2\cos\omega t - \dot{r}\omega\sin\omega t$

$\dot{y} = \dot{r}\sin\omega t + r\omega\cos\omega t \Rightarrow$

$\ddot{y} = \ddot{r}\sin\omega t + \dot{r}\omega\cos\omega t + \dot{r}\omega\cos\omega t - r\omega^2\sin\omega t$ άρα

$$\left\{\begin{aligned} \ddot{x} &= \ddot{r}\cos\omega t - 2\dot{r}\omega\sin\omega t - r\omega^2\cos\omega t \\ \ddot{y} &= \ddot{r}\sin\omega t + 2\dot{r}\omega\cos\omega t - r\omega^2\sin\omega t \end{aligned}\right\} (*)$$

Λύνω ως προς λ_1 και λ_2 έχω : $\lambda_1 = -\frac{m\ddot{x}}{\sin\omega t}$, $\lambda_2 = \frac{m\ddot{y}}{\cos\omega t} \Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow m\ddot{x}\cos\omega t + m\ddot{y}\sin\omega t = 0 \Rightarrow$

$\ddot{x}\cos\omega t + \ddot{y}\sin\omega t = 0$ (**)

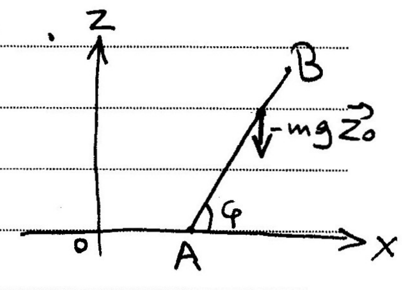
Αντικαθιστώ στην (**) τα (*) και βγαίνει

$\ddot{r} - r\omega^2 = 0$ (Δ.Ε. με σταθ. συντελ.) άρα $r = c_1 e^{\omega t} + c_2 e^{-\omega t}$, c_1, c_2 σταθ.

Άσκηση

Υλικό σημείο μάζας m κινείται στην ευθεία AB του κεκλιμένου επιπέδου του σχήματος. Το κεκλιμένο επίπεδο κινείται με σταθερή επιτάχυνση $\vec{a} = a\vec{x_0}$ στον άξονα Ox. Τη χρονική στιγμή $t=0$ το A βρίσκεται στην αρχή O και έχει ταχύτητα $\vec{U_0} = u_0\vec{x_0}$. Να βρεθούν οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης του υλικού σημείου.

Λύση



Δεσμοί: $f_1 \equiv z - tg\varphi(x - x_A) = 0$ (ε)·

$f_2 \equiv y = 0$

$F^{(\varepsilon)} \equiv f = -mg\vec{z_0}$

$F^{(\delta)} = \lambda_1 \nabla f_1 + \lambda_2 \nabla f_2 = \ldots$

$\ddot{x}_A = a \Rightarrow \dot{x}_A = at + c_1 \Rightarrow x_A = \frac{a}{2}t^2 + c_1 t + c_2$

από αρχικές συνθήκες θέση $c_2 = 0$ και ταχύτητα $c_1 = u_0$

άρα $x_A = \frac{a}{2}t^2 + u_0 t$

~~[illegible]~~ $f_1 \equiv z - \operatorname{tg}\varphi\left(x - \frac{a}{2}t^2 + v_0 t\right) = 0$

$m\ddot{x} = \lambda_1 \operatorname{tg}\varphi$

$m\ddot{y} = \lambda_2$

$m\ddot{z} = -mg - \lambda_1$

…… [illegible] ……